BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И СПЕКТРАЛЬНОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.И.ИСМАЙЛОВ

Бакинский Государственный Университет

В работе дана классификация спектра и изучена спектральность некоторых матричных операторов в банаховом пространстве, кроме того, установлено соотношение между разложениями единицы данного матричного оператора и матричного элемента.

Пусть X – банахово пространство и $B(X)$ - банахова алгебра линейных, ограниченных операторов, действующих в X, с единицей I.

При линеаризации операторного пучка

$$L(\lambda) = I - \lambda^2 A, \tag{1}$$

где $A \in B(X)$, приходится изучать в пространстве X^2, операторный пучок

$$\widetilde{L}(\lambda) = \widetilde{I} - \lambda \widetilde{A}, \tag{2}$$

где

$$\widetilde{I} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \widetilde{A} = \begin{pmatrix} O & A \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Установим некоторые связи между операторами A и $\widetilde{A}$. Предварительно приведем некоторые вспомогательные определения и факты из [1]- [3].

Определение 1. Пусть $T \in B(X)$. Резольвентное множество оператора T есть множество $\rho(T)$, состоящее из всех комплексных чисел λ, для которых оператор $T - \lambda I$ ограниченно-обратим. Если λ не лежит в $\rho(T)$, то говорят, что λ лежит в спектре $\sigma(T)$ оператора T, при этом спектральные точки имеют следующую классификацию: точечный спектр оператора T есть множество $\sigma_p(T)$, состоящее из всех комплексных чисел λ, для которых оператор $T - \lambda I$ не является взаимно однозначным; остаточный спектр оператора T есть множество $\sigma_r(T)$, состоящее из всех комплексных чисел λ, для которых оператор $T - \lambda I$ взаимно однозначен и имеет образ не плотный в X; непрерывный спектр оператора T есть множество $\sigma_c(T)$, состоящее из всех комплексных чисел λ, для которых оператор $T - \lambda I$ взаимно однозначен и имеет всюду плотный образ, не совпадающий со всем X.

Определение 2. Оператор T со счетно-аддитивным разложением единицы, заданное на борелевских множествах комплексной плоскости называется спектральным оператором.

Утверждение 1. Ограниченный оператор T является спектральным тогда и только тогда, когда его можно однозначно представить в виде суммы $S + N$, ограниченного оператора S скалярного типа и квазинильпотентного оператора N, коммутирующего с S, причем операторы T и S имеют одно и тоже разложение единицы.

Определение 3. Пусть N есть квазинильпотентная часть спектрального оператора T. Говорят, что T имеет тип m, если для некоторого целого положительного m оператор $N^m = 0$.

Утверждение 2. Пусть T – ограниченный спектральный оператор с разложением единицы $E(\cdot)$ и h – функция, аналитическая в $\sigma\ (T)$, то $h(T)$ является спектральным оператором и его разложение единицы при любом борелевском подмножестве δ комплексной плоскости определяется соотношением $E(\delta;\ h(T)) = E(\ h^{-1}(\delta);\ T)$, кроме того, если T типа m, то $h(T)$ также является оператором типа m.

Пусть X^* - пространство, сопряженное к X. Известно *([3], XV, 9. стр. 55)*, что между $(X^2)^*$ и $(X^*)^2$ можно установить изометрический изоморфизм, такой, что каждому элементу $\widetilde{f}$ на $(X^2)^*$ взаимно однозначно соответствует элемент $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ на $(X^*)^2$ и

$$\widetilde{f}\ (\widetilde{x}\ ) = f\,(x) + g\,(y),\ \ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2, \tag{3}$$

при этом

$$\left\|\widetilde{f}\right\|^2 = \left\|f\right\|^2 + \left\|g\right\|^2. \tag{4}$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Верны утверждения :

$$\sigma_p\ (\widetilde{A}\ ) = \ \bigcup\ \{\lambda :\ \lambda^2 \in\ \sigma_p\ (A)\ \}, \tag{5}$$

$$\sigma_r\ (\widetilde{A}\ ) = \ \bigcup\ \{\lambda :\ \lambda^2 \in\ \sigma_r\ (A)\ \}, \tag{6}$$

$$\sigma_c\ (\widetilde{A}\ ) = \ \bigcup\ \{\lambda :\ \lambda^2 \in\ \sigma_c\ (A)\ \}. \tag{7}$$

Доказательство. Справедливость утверждения *(5)* очевидно, поскольку оператор $\widetilde{A} - \lambda\widetilde{I}$ взаимно однозначен тогда и только тогда, когда взаимно однозначен оператор $A - \lambda^2 I$.

Пусть $\lambda^2 \in\ \sigma_r\ (A)$. Тогда существует $f \in X^*,\ f \neq 0$, такой, что при любом $x \in X$

$$f\,((A - \lambda^2 I)\ x) = 0. \tag{8}$$

Пусть $g = \lambda f$. Возьмем $\widetilde{f}$ на $(X^2)^*$, такой, что $\widetilde{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Ясно, что $\widetilde{f}$ отличен от нуля. Тогда при любом $\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X^2$, имеем

$$\widetilde{f}\,((\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I})\,\widetilde{x}) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} O & A \\ I & O \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -\lambda I & A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ay-\lambda x \\ x-\lambda y \end{pmatrix} =$$

$$= f(Ay-\lambda x) + g(x-\lambda y) = f(Ay-\lambda x) + \lambda f(x-\lambda y) =$$

$$= f(Ay-\lambda x+\lambda x-\lambda^2 y) = f((A-\lambda^2 I)\,y).$$

Так как, в силу *(8)*, $f((A-\lambda^2 I)\,y) = 0$, то $\widetilde{f}((\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I})\,\widetilde{x}) = 0$. Поскольку $\widetilde{f}$ не нулевой, то образ оператора $\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I}$ не плотен в X^2, следовательно, $\lambda \in \sigma_r(\widetilde{A})$.
Обратно, пусть $\lambda \in \sigma_r(\widetilde{A})$, тогда существует ненулевой элемент $\widetilde{f} \in (X^2)^*$, такой, что при любом $\widetilde{x} \in X^2$

$$\widetilde{f}\,((\widetilde{A}-\lambda\widetilde{I})\,\widetilde{x}) = 0,\ \widetilde{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix},\ \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{9}$$

тогда из (9) имеем

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ay-\lambda x \\ x-\lambda y \end{pmatrix} = 0,$$

что равносильно соотношению

$$f(Ay-\lambda x) + g(x-\lambda y) = 0. \tag{10}$$

Так как элементы $x,\ y \in X$ произвольны, то, в частности, при $x = \lambda y$, из (10) имеем

$$f((A-\lambda^2 I)\,y) = 0, \tag{11}$$

отсюда, в силу произвольности $y \in X$ и того, что $f \neq 0$ (ибо, в силу (10) получим $g = 0$, что противоречит предположению $\widetilde{f} \neq \widetilde{0}$), имеем $\lambda^2 \in \sigma_r(A)$.

Утверждение (7) теоремы непосредственно следует из (5) и (6). Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Справедливо:

$$\sigma(\widetilde{A}) = \bigcup \{\lambda :\ \lambda^2 \in \sigma(A)\},$$

Теорема 2. Пусть A – ограниченно-обратимый оператор. Тогда оператор A является спектральным оператором с разложением единицы $E(\cdot)$ тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}$ является спектральным оператором с разложением единицы

$$\widetilde{E}_1(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O \\ O & E_1(\cdot) \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

где $E_1(\cdot) = E(h^{-1}(\cdot))$, а $h(z)$ - некоторая однозначная ветвь функции $h(z)= \sqrt{z}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть A спектрален. Тогда очевидно, что спектральным и будет оператор

$$\widetilde{A}^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

с разложением

$$\widetilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E(\cdot) & O \\ O & E(\cdot) \end{pmatrix},$$

тогда, согласно утверждению 2, оператор $\widetilde{A} = h(\widetilde{A}^2)$ спектрален и имеет разложение единицы $\widetilde{E}_1(\cdot) = \widetilde{E}(h^{-1}(\cdot))$.

Достаточность. Пусть оператор $\widetilde{A}$ - спектрален с разложением единицы $\widetilde{E}_1(\cdot)$. Тогда ясно, что оператор $\widetilde{A}^2$ также спектрален с некоторым разложением единицы

$$\widetilde{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & N(\lambda) \\ K(\lambda) & L(\lambda) \end{pmatrix}, \ \widetilde{E}_1(\cdot) = \widetilde{E}(h^{-1}(\cdot)).$$

Известно, что всякий оператор, коммутирующий со спектральным оператором, коммутирует с её разложением единицы, следовательно, так как оператор $\widetilde{A}^2$ коммутирует с каждым из операторов

$$I_1 = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

оператор $\widetilde{E}(\lambda)$ коммутирует с операторами I_1 и I_2. Имеем

$$I_1 \widetilde{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(\lambda) & N(\lambda) \\ K(\lambda) & L(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K(\lambda) & L(\lambda) \\ M(\lambda) & N(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{E}(\lambda) I_1 = \begin{pmatrix} M(\lambda) & N(\lambda) \\ K(\lambda) & L(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ I & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\lambda) & M(\lambda) \\ L(\lambda) & K(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} K(\lambda) & L(\lambda) \\ M(\lambda) & N(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\lambda) & M(\lambda) \\ L(\lambda) & K(\lambda) \end{pmatrix},$$

отсюда

$$M(\lambda) = L(\lambda),\ N(\lambda) = K(\lambda),$$

значит

$$\widetilde{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & K(\lambda) \\ K(\lambda) & M(\lambda) \end{pmatrix};$$

аналогично,

$$I_2\,\widetilde{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M(\lambda) & K(\lambda) \\ K(\lambda) & M(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ K(\lambda) & M(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{E}(\lambda)\,I_2 = \begin{pmatrix} M(\lambda) & K(\lambda) \\ K(\lambda) & M(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & K(\lambda) \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} O & O \\ K(\lambda) & M(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & K(\lambda) \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix},$$

отсюда $K(\lambda) = O$ и $\widetilde{E}(\lambda)$ имеет вид

$$\widetilde{E}(\lambda) = \begin{pmatrix} M(\lambda) & O \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, так как $\widetilde{E}(\lambda)^2 = \widetilde{E}(\lambda)$, имеем

$$\begin{pmatrix} M(\lambda) & O \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M(\lambda) & O \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^2(\lambda) & O \\ O & M^2(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M^2(\lambda) & O \\ O & M^2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\lambda) & O \\ O & M(\lambda) \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$M^2(\lambda) = M(\lambda).$$

Ясно, что оператор $M(\lambda)$ является спектральной мерой и $M(\sigma(\widetilde{A}^2)) = I$. Так как $\sigma(\widetilde{A}^2) = \sigma(A)$, то $M(\sigma(A)) = I$ и $\sigma(A/M(\delta)X) = \sigma(\widetilde{A}^2/\widetilde{E}(\delta)X^2) \subseteq \overline{\delta}$ для любого борелевского множества δ. Следовательно, оператор A спектрален со спектральным разложением $E(\lambda) = M(\lambda)$.

Замечание. Отметим, что необходимость теоремы следует также из результатов [4], [5], однако в данной работе, для получения разложения единицы, ссылка ведется в [3], кроме того достаточность теоремы справедливо и в случае, когда оператор A не обратим.

Следствие 1. Ограниченно-обратимый оператор A имеет тип m тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}$ имеет тип m.

Доказательство. Очевидно, что квазинильпотентные части N оператора A и $\widetilde{N}$ оператора $\widetilde{A}^2$ связаны между собой соотношением

$$\widetilde{N} = \begin{pmatrix} N & O \\ O & N \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\widetilde{N}^m = \begin{pmatrix} N^m & O \\ O & N^m \end{pmatrix},$$

тем самым, оператор A есть оператор типа m, тогда и только тогда, когда оператор $\widetilde{A}^2$ имеет тип m. Так как оператор A ограниченно обратим, то легко показать, что оператор $\widetilde{A}$ ограниченно-обратим, следовательно, согласно утверждению 2, операторы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}^2$ имеют одинаковые типы, что и требовалось доказать.

Теперь при линеаризации пучка

$$L(\lambda) = I - A - \lambda B - \lambda^2 C, \tag{13}$$

где $A, B, C \in B(X)$, причем оператор $I - A$ ограниченно-обратим, приходится исследовать оператор-матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (I-A)^{-1}B & (I-A)^{-1}C \\ I & O \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Пусть операторы A, B и C попарно коммутируют, причем оператор B - квазинильпотентен, а оператор C – ограниченно-обратим. Тогда

$$\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{A}) = h(\boldsymbol{\sigma}((I-A)^{-1}C)),$$

причем, если $(I - A)^{-1}C$ есть спектральный оператор с разложением единицы $E(\cdot)$, то $\widetilde{A}$ есть спектральный оператор с разложением единицы

$$\widetilde{E}_1(\cdot) = \begin{pmatrix} E_1(\cdot) & O \\ O & E_1(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $E_1(\cdot) = E(h^{-1}(\cdot))$, а $h(z)$ – одна из однозначных ветвей функции $h(z)=\sqrt{z}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widetilde{A}^2$

$$\widetilde{A}^2 = \begin{pmatrix} (I-A)^{-1}B & (I-A)^{-1}C \\ I & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (I-A)^{-1}B & (I-A)^{-1}C \\ I & O \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((I-A)^{-1}B)^2 + (I-A)^{-1}C & (I-A)^{-2}BC \\ (I-A)^{-1}B & (I-A)^{-1}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I-A)^{-1}C & O \\ O & (I-A)^{-1}C \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} (I-A)^{-1}B & O \\ O & (I-A)^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I-A)^{-1}B & (I-A)^{-1}C \\ I & O \end{pmatrix} = \widetilde{B} + \widetilde{C}.$$

Ясно, что из квазинильпотентности $(I-A)^{-1}C$, следует квазинильпотентность $\widetilde{C}$, кроме того, $\widetilde{C}$ коммутирует с $\widetilde{B}$, тогда $\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{A}^2) = \boldsymbol{\sigma}(\widetilde{B}) = \boldsymbol{\sigma}((I-A)^{-1}C)$, и в силу теоремы об отображении спектра $\boldsymbol{\sigma}(\widetilde{A}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\sigma}((I-A)^{-1}C))$. Так как оператор $(I-A)^{-1}C$ спектрален, с разложением $E(\cdot)$, то спектральным будет и оператор $\widetilde{B}$ с разложением единицы

$$\widetilde{E}(\cdot) = \begin{pmatrix} E(\cdot) & O \\ O & E(\cdot) \end{pmatrix},$$

следовательно, оператор $\widetilde{A}^2$ спектрален с тем же разложением $\widetilde{E}(\cdot)$, поскольку разложение единицы спектрального оператора не меняется, если к нему добавить коммутирующий с ним квазинильпотентный оператор. Так как оператор $(I-A)^{-1}C$ ограниченно-обратим, то легко показать, что оператор-матрица

$$\begin{pmatrix} O & I \\ (I-A)C^{-1} & -C^{-1}B \end{pmatrix}$$

является обратной к $\widetilde{A}$, следовательно, аналогично вышепоказанным, оператор $\widetilde{A}$ является спектральным оператором с разложением единицы *(14)*. Теорема полностью доказана.

Отметим, что вопрос исследования спектра и спектральности матричного оператора был поставлен и изучен Н.Данфордом ([3], стр. 52-76) в гильбертовом пространстве с использованием изометрического изоморфизма коммутативной алгебры линейных, ограниченных операторов с алгеброй существенно-ограниченных измеримых комплексных функций, где спектр и спектральность матричного оператора изучается посредством спектра и спектральности конечномерного оператора, элементы соответствующей матрицы которого состоят из образов элементов матричного оператора при данном изометрическом изоморфизме. Исследуя поставленный вопрос в банаховом пространстве, где трудно построить данный изоморфизм , в данной работе спектр и спектральность матричного оператора изучается посредством спектра и спектральности элементов матричного оператора .

В заключение приношу благодарность своему научному руководителю проф. А.М.Ахмедову за подстановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, общая теория. Т. I. – М: ИЛ, 1962.

2. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Спектральная теория. Т. II. –М: Мир, 1966.
3. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, Спектральные операторы. Т. III.
4. Ахмедов А.М. О несамосопряженных операторах, близких к спектральным, и их приложениях. – В кн.: Линейные операторы и их приложения, Баку, 1989, с. 3-15.
5. J.G.Stampfli. Roots of scalar operator, Proc. Amer. Math.Soc. v. 13, 1962, pp. 796 - 798.

BANAX FƏZASINDA BƏZİ MATRİS OPERATORLARIN SPEKTRİNİN VƏ SPEKTRALLIĞININ TƏDQİQİ

M.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

İşdə Banax fəzasında təsir edən bir sinif operator-matrislərin spektrləri tədqiq edilir. Bununla birlikdə həmin operatorların spektrallığı da öyrənilir. Matrisi təyin edən əsas operatorla həmin matrisin vahidin ayrılışları arasındakı əlaqə qurulur.

INVESTIGATION OF SPEKTRUM AND SPEKTRALICITY OF SOME MATRIX OPERATORS IN BANACH SPACE

M.I.ISMAYLOV

SUMMARY

In this work the spectra of operator-matricies acting in Banach space are investigated. Also the spectralicity of these operators are studied. The relation between the resolutions of identities of the matrix and the operator which defines this matrix is constructed.